Münster.1930 № 14 Phil. Diss

Über die Folge der Ableitungen einer reellen Funktion von 1, 2 und mehr Argumenten.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
der Philosophischen und Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Westfälischen Wilhelms-Universität
zu Münster in Westfalen

vorgelegt von

Schwester M. Lioba Liebrecht
aus Paderborn.

Göttingen 1930.
Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Tag der mündlichen Prüfung: 29. Mai 1929.
Dekan: Herr Prof. Dr. C. Münscher.
Referent: Herr Prof. Dr. L. Neder.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 5

Abschnitt I.

Über die Folge der Ableitungen in einem gegebenen Punkte.

§ 1. Funktionen eines reellen Arguments 7
§ 2. Funktionen von zwei reellen Argumenten 10
§ 3. Funktionen von p reellen Argumenten 13

Abschnitt II.

Über die Folge der Maximalbeträge der Ableitungen in einem gegebenen endlichen Intervall.

§ 4. Funktionen eines reellen Arguments 15
§ 5. Funktionen von zwei reellen Argumenten 17
§ 6. Funktionen von p reellen Argumenten 19

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555425_0147

Einleitung.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, in einigen Sätzen gewisse Beziehungen darzulegen, die erstens zwischen gegebenen Zahlenfolgen und den Ableitungen einer reellen Funktion in einem Punkte und zweitens zwischen gegebenen Zahlenfolgen und den Maximalbeträgen der Ableitungen in einem endlichen Intervall bestehen. Die Untersuchungen beziehen sich auf reelle Funktionen von reellen Veränderlichen, die in einem gegebenen Gebiet stetige Ableitungen aller Ordnungen haben, aber nicht notwendig analytisch sind.

Für Funktionen eines reellen Arguments findet sich ein grundlegender Satz bei Herrn Borel[1]). Er lautet: Ist $G_0, G_1, G_2, \ldots, G_\mu, \ldots$ eine beliebige Folge von reellen Zahlen, so läßt sich dazu eine Funktion $g(x)$ konstruieren, die im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ beliebig oft differentiierbar ist und für welche die Gleichungen bestehen

$$g^{(m)}(1_-) = G_m,$$

wobei man unter $g^{(m)}(1_-)$ die linksseitigen Ableitungen für $x = 1$ zu verstehen hat.

Dieser Satz läßt sich sofort auf die zweiseitigen Ableitungen einer Funktion ausdehnen. Man braucht dazu nur zwei Borelsche Lösungen aneinanderzuheften[2]). Durch eine Verschiebung $x \parallel x+1$ kann man zunächst erreichen, daß für eine im Intervall $-2 \leqq x \leqq 0$ beliebig oft differentiierbare Funktion $g_1(x)$ die linksseitigen Ableitungen im Nullpunkt die vorgeschriebenen Werte $g_1^{(m)}(0_-) = G_m$ annehmen. Aus einer ebenso gearteten Funktion $\bar{g}_1(x)$ mit

$$\bar{g}_1^{(m)}(0_-) = (-1)^m G_m$$

läßt sich darauf im Intervall $0 \leqq x \leqq 2$ eine weitere Funktion

1) E. Borel, Thèses. Thèse I. Sur quelques points de la théorie des fonctions. Paris 1894. Vgl. S. 30—34.

2) Nach einer Mitteilung von Herrn Knopp.

$g_2(x)$ finden durch den Ansatz

$$g_2(x) = g_1(-x).$$

Dieses $g_2(x)$ besitzt im Intervall $0 \leqq x \leqq 2$ Ableitungen beliebig hoher Ordnung

$$g_2^{(m)}(x) = (-1)^m g_1^{(m)}(-x),$$

und für die rechtsseitigen Ableitungen im Nullpunkt gilt

$$g_2^{(m)}(0_+) = (-1)^m g_1^{(m)}(0_-) = G_m.$$

Damit hat man also bei Zusammensetzung von $g_1(x)$ und $g_2(x)$ eine im Intervall $-2 \leqq x \leqq 2$ beliebig oft differentiierbare Funktion mit der Eigenschaft, daß ihre zweiseitigen Ableitungen an der Stelle $x = 0$ beliebig vorgeschrieben sind. Das Intervall $(-2, 2)$ wäre dann noch auf die ganze reelle Achse auszudehnen.

Ich werde nun im ersten Abschnitt dieser Arbeit zunächst in § 1 für den im obigen Sinne verallgemeinerten Borelschen Satz einen direkteren Beweis bringen, dessen Skizze ich einer mündlichen Mitteilung des Herrn Neder verdanke. Es wird durch ihn mit einem Schlage die Existenz einer für alle reellen x unbegrenzt differentiierbaren Funktion bewiesen, deren Ableitungen im Nullpunkt willkürlich vorgeschrieben sind. Dieser Beweis hat den Vorzug, daß er in einfacher Weise auf Funktionen von zwei und mehr Argumenten übertragen werden kann. Diese Übertragung werde ich in § 2 bezw. § 3 durchführen.

Im zweiten Abschnitt werde ich an eine Bemerkung von Herrn Carleman[3]) anknüpfen, der für Funktionen eines reellen Arguments nachweist, daß sich die Folge der Maximalbeträge der Ableitungen in einem endlichen Intervall nicht beliebig vorschreiben läßt, daß aber wohl das Wachstum sowohl „stärker“ als auch „schwächer“ gemacht werden kann als das einer gegebenen Zahlenfolge, vgl. § 4 dieser Arbeit. Auch hier werde ich die entsprechenden Resultate wenigstens für Funktionen von zwei Argumenten in § 5 herleiten, ihre Analoga für p Argumente aber als hierauf naheliegend nur kurz behandeln.

3) T. Carleman, Les fonctions quasi analytiques. Paris 1926. Vgl. S. 11.

ABSCHNITT I.

Über die Folge der Ableitungen in einem gegebenen Punkte.

§ 1. Funktionen eines reellen Arguments.

Satz 1: Zu jeder beliebig vorgeschriebenen Folge

$$G_0,\ G_1,\ G_2,\ \ldots,\ G_\mu,\ \ldots$$

gibt es eine für alle reellen x unbegrenzt differentiierbare Funktion $f(x)$ der Art, daß

$$f^{(m)}(0) = G_m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

a) **Hilfsbetrachtungen:** Wenn die Potenzreihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{G_\mu}{\mu!}\, x^\mu \tag{2}$$

konvergierte für alle x, so hätten wir bereits eine Funktion $f(x)$ der gewünschten Art. Es wäre nämlich

$$f^{(m)}(x) = \sum_{\mu=m}^{\infty} \frac{G_\mu}{(\mu-m)!}\, x^{\mu-m}$$

und

$$f^{(m)}(0) = G_m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Da aber die Zahlenfolge $\{G_\mu\}$ beliebig vorgeschrieben ist, wird die Reihe (2) nicht immer konvergieren.

Man kann jetzt versuchen, die Funktion x^μ zu ersetzen durch eine andere $\psi_\mu(x)$, die erstens im Nullpunkt den Gang der Ableitungen von x^μ in ausreichendem Maße imitiert und zweitens mit ihren Ableitungen $\psi_\mu^{(m)}(x)$ für alle x bei $\mu \to \infty$ genügend klein wird.

Ersteres leistet bereits die Funktion

$$\varphi_\mu(x) = \frac{x^\mu}{1 + x^{2\mu}} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Für $|x| < 1$ und $\mu \geqq 1$ ist nämlich

$$\varphi_\mu(x) = x^\mu (1 - x^{2\mu} + x^{4\mu} \mp \ldots).$$

Wir führen nun das Symbol $\mu?$ ein durch die Formeln

$$0? = \tfrac{1}{2};\quad \mu? = \mu! \text{ für } \mu = 1, 2, 3, \ldots .$$

Aus der Reihendarstellung von $\varphi_\mu(x)$ folgt dann

$$\varphi_\mu^{(m)}(0) = 0 \text{ für } m = 0, 1, 2, \ldots, \mu-1; \quad \varphi_\mu^{(\mu)}(0) = \mu?,$$

(was für $\mu = 0$ direkt aus der Definition folgt), fast genau wie bei der Funktion x^μ.

Um auch der zweiten Forderung zu genügen, gehen wir von der Funktion $\varphi_\mu(x)$ über zu der Funktion

$$\psi_\mu(x) = \frac{1}{k^\mu}\varphi_\mu(kx) = \frac{x^\mu}{1+(kx)^{2\mu}} \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

wo $k = k_\mu$ das allgemeine Glied einer hinreichend stark anwachsenden Folge bedeutet, die später näher definiert und vorläufig bloß der Bedingung $k_\mu > 0$ unterworfen wird. Es wird

$$\psi_\mu^{(m)}(x) = \frac{k^m}{k^\mu}\varphi_\mu^{(m)}(kx),$$

woraus folgt

$$\psi_\mu^{(m)}(0) = 0 \text{ für } m < \mu, \quad \psi_\mu^{(\mu)}(0) = \mu?, \tag{4}$$

sodaß also die μ ersten Ableitungen von $\psi_\mu(x)$ im Nullpunkt die von x^μ ebenfalls hinreichend genau imitieren, während aus (3) unmittelbar folgt

$$|\psi_\mu(x)| \leqq \frac{1}{2k^\mu},$$

sodaß zunächst $\psi_\mu(x)$ selbst für große k, also auch für große μ, klein ausfällt.

Nun brauchen wir noch eine für alle x gleichmäßige Abschätzung der Funktion $\psi_\mu(x)$ und ihrer Ableitungen. Wir gehen aus von der Funktion $\varphi_\mu(x)$ und behaupten zunächst:

Es ist $|\varphi_\mu(x)| \leqq 1$ in einem Streifen $|\Im(x)| \leqq \frac{1}{4\mu}$ der komplexen x-Ebene.

Für $\mu = 0$ ist nichts zu beweisen.

Für $\mu \geqq 1$ lautet die Behauptung in Polarkoordinaten $x = re^{i\vartheta}$:

$$r^{2\mu} \leqq |1 + x^{2\mu}|^2 = 1 + 2r^{2\mu}\cos 2\mu\vartheta + r^{4\mu}. \tag{5}$$

Diese Ungleichung ist richtig, wenn

$$r \leqq \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Es ist nämlich die rechte Seite von (5) $\geqq 1 - 2r^{2\mu}$, was $\geqq 2r^{2\mu}$ wegen $4r^{2\mu} \leqq 4r^2 \leqq 1$. Ungleichung (5) gilt ferner, wenn

$$\cos 2\mu\vartheta \geqq 0.$$

Dann ist die rechte Seite von (5) $\geqq 1 + r^{4\mu} \geqq 2r^{2\mu} \geqq r^{2\mu}$. Die Beziehung $\cos 2\mu\vartheta \geqq 0$ ist erfüllt, falls

$$|2\mu\vartheta| \leqq \frac{\pi}{2}, \quad |\vartheta| \leqq \frac{\pi}{4\mu}. \tag{7}$$

Dasselbe gilt auch für

$$|2\mu\vartheta - 2\mu\pi| \leqq \frac{\pi}{2}, \quad |\vartheta - \pi| \leqq \frac{\pi}{4\mu}. \tag{8}$$

Die Behauptung $|\varphi_\mu(x)| \leqq 1$ gilt also in dem aus dem Kreise (6) und den Sektoren (7) und (8) vereinigten Gebiet, folglich auch im Streifen

$$|\Im(x)| \leqq \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4\mu}$$

und wegen

$$\sin x \geqq \frac{2}{\pi} x \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$$

erst recht im Streifen

$$|\Im(x)| \leqq \frac{1}{4\mu} \leqq \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4\mu}.$$

Wegen der Definition (3) von $\psi_\mu(x)$ folgt nun aus der Abschätzung für $\varphi_\mu(x)$ ohne weiteres:

$$|\psi_\mu(x)| \leqq \frac{1}{k^\mu} \quad \text{für} \quad |\Im(x)| \leqq \frac{1}{4\mu k} \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots).$$

In diesem Streifen ist $\psi_\mu(x)$ eine reguläre Funktion. Es gelten also bei reellem x für $\psi_\mu^{(m)}(x)$ die Cauchyschen Formeln, angewandt auf den Kreis um x vom Radius $\frac{1}{4\mu k}$. Es ist daher

$$\psi_\mu^{(m)}(x) = \frac{m!}{2\pi i} \int \frac{\psi_\mu(z)}{(z-x)^{m+1}}\, dz \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, \ \mu = 1, 2, \ldots),$$

also

$$|\psi_\mu^{(m)}(x)| \leqq \frac{m!}{2\pi} \frac{2\pi}{4\mu k} \frac{\frac{1}{k^\mu}}{\left(\frac{1}{4\mu k}\right)^{m+1}} \leqq \frac{m!\, 4^m \mu^m}{k^{\mu - m}} \tag{9}$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots, \ \mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Diese Formel gilt auch noch für $m = 0, 1, 2, \ldots$ und $\mu = 0$, wenn $0^0 = 1$ gesetzt wird.

b) **Beweis des Satzes 1:** Aus der gegebenen Zahlenfolge $G_0, G_1, G_2, \ldots, G_\mu, \ldots$ bilden wir zunächst durch vollständige Induktion eine Folge von Zahlenpaaren H_m, k_m folgendermaßen:

Zuerst wird für $m = 0, 1, 2, \ldots$ nach Festlegung des 0-, 1-, …, $(m-1)$-ten Paares H_m so bestimmt, daß

$$\sum_{\mu=0}^{m} H_\mu \psi_\mu^{(m)}(0) = G_m \tag{10}$$

wird. Dies ist möglich, da links die Daten der $(m-1)$ ersten Glieder bereits bekannt sind und das letzte Glied wegen (4) einfach den Wert $m!\, H_m$ hat. Darauf wird k_m so groß gewählt, daß

$$k_m \geqq 1, \quad |H_m| \frac{m^m}{k_m} \leqq \frac{1}{(m+1)^2} \tag{11}$$

ausfällt.

Nun wird die Funktion angesetzt in der Gestalt

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} H_\mu \psi_\mu(x), \tag{12}$$

wo in $\psi_\mu(x)$ jetzt k den Wert k_μ bedeutet. Dies $f(x)$ hat die behaupteten Eigenschaften. Es ist nämlich zunächst die Reihe (12) mit sämtlichen gliedweise abgeleiteten Reihen gleichmäßig konvergent für alle reellen x, denn nach (9) und (11) ist bei gegebenem $m = 0, 1, 2, \ldots$ für $\mu > m$:

$$|H_\mu||\psi_\mu^{(m)}(x)| \leqq \frac{k_\mu}{(\mu+1)^2\,\mu^\mu} \frac{m!\,4^m\,\mu^m}{k_\mu^{\mu-m}} \leqq \frac{m!\,4^m\,\mu^\mu\,k_\mu}{k_\mu(\mu+1)^2\,\mu^\mu} = \frac{m!\,4^m}{(\mu+1)^2}.$$

Daher ist die Reihe für $f(x)$ unbegrenzt gliedweise differentiierbar, und es wird wegen (4) und (10)

$$\begin{aligned} f^{(m)}(0) &= \sum_{\mu=0}^{\infty} H_\mu \psi_\mu^{(m)}(0) \\ &= \sum_{\mu=0}^{m} H_\mu \psi_\mu^{(m)}(0) + \sum_{\mu=m+1}^{\infty} H_\mu \psi_\mu^{(m)}(0) \\ &= \sum_{\mu=0}^{m} H_\mu \psi_\mu^{(m)}(0) = G_m. \end{aligned}$$

§ 2. Funktionen von zwei reellen Argumenten.

Der Satz 1 läßt sich auf die partiellen Ableitungen reeller Funktionen von zwei reellen Argumenten x und y übertragen. Man erhält dann:

Satz 2: Zu jeder beliebig vorgeschriebenen Doppelfolge $\{G_{\mu,\nu}\}$ gibt es eine für alle reellen x und y unbegrenzt partiell differentiierbare, mit allen partiellen Ableitungen stetige Funktion $f(x, y)$ der Art, daß

$$f^{(m,n)}(0, 0) = G_{m,n} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots,\ n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

a) **Hilfsbetrachtungen:** Wir benötigen hier die Funktionen

$$\psi_{\mu,\nu}(x,y) = \psi_\mu(x)\,\psi_\nu(y) \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo in beiden Faktoren $k = k_{\mu,\nu}$ das allgemeine Glied einer genügend stark anwachsenden Doppelfolge ist, die noch näher definiert wird.

Dann ist $\psi_{\mu,\nu}^{(m,n)}(x,y) = \psi_\mu^{(m)}(x)\,\psi_\nu^{(n)}(y)$ vorhanden und dem Werte nach unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen, sowie zweidimensional stetig. Ferner ist wegen (4)

$$(14)\quad \begin{cases} \psi_{\mu,\nu}^{(m,n)}(0,0) = \psi_\mu^{(m)}(0)\,\psi_\nu^{(n)}(0) = 0 \text{ für } m < \mu \text{ oder } n < \nu, \\ \psi_{\mu,\nu}^{(\mu,\nu)}(0,0) = \mu\,?\,\nu\,?. \end{cases}$$

Es läßt sich auch sofort eine gleichmäßige Abschätzung für die Funktionen $\psi_{\mu,\nu}(x,y)$ und ihre partiellen Ableitungen angeben. Nach (9) besteht nämlich für alle reellen x die Ungleichung

$$|\psi_\mu^{(m)}(x)| \leqq \frac{m!\,4^m\,\mu^m}{k_{\mu,\nu}^{\mu-m}} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots,\ \mu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Entsprechend gilt für alle reellen y

$$|\psi_\nu^{(n)}(y)| \leqq \frac{n!\,4^n\,\nu^n}{k_{\mu,\nu}^{\nu-n}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Es folgt: Für alle reellen x und y, d. h. in der ganzen xy-Ebene, ist

$$(15)\quad \begin{cases} |\psi_{\mu,\nu}^{(m,n)}(x,y)| = |\psi_\mu^{(m)}(x)|\,|\psi_\nu^{(n)}(y)| \\ \leqq \dfrac{m!\,n!\,\mu^m\,\nu^n\,4^{m+n}}{k_{\mu,\nu}^{\mu+\nu-(m+n)}} \leqq \dfrac{m!\,n!\,4^{m+n}(\mu+\nu)^{m+n}}{k_{\mu,\nu}^{\mu+\nu-(\mu+\nu)}} \end{cases}$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots,\ \mu = 0, 1, 2, \ldots,\ n = 0, 1, 2, \ldots,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

b) **Beweis des Satzes 2:** Es sei $G_{0,0}, G_{0,1}, G_{1,0}, \ldots, G_{\mu,\nu}, \ldots$ die gegebene Doppelfolge, deren Glieder wir uns nach Diagonalen angeordnet denken.

Wir definieren nun zwei weitere Doppelfolgen $\{H_{m,n}\}, \{k_{m,n}\}$ durch eine Art zweidimensionaler vollständiger Induktion in der Weise, daß wir die Bestimmung der $H_{m,n}, k_{m,n}$ nach Diagonalen $m+n = \text{const.}$ vornehmen, wobei die Reihenfolge in der Diagonale beliebig ist, und im übrigen so vorgegangen wird, daß zunächst $H_{m,n}$ so bestimmt wird, daß

$$(16)\quad \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} H_{\mu,\nu}\,\psi_{\mu,\nu}^{(m,n)}(0,0) = G_{m,n},$$

und darauf $k_{m,n}$ so, daß

(17) $$k_{m,n} \geqq 1; \quad |H_{m,n}| \frac{(m+n)^{m+n}}{k_{m,n}} \leqq \frac{1}{(m+1)^2 (n+1)^2}$$

wird.

Diese induktive Bestimmung der $H_{m,n}$ und $k_{m,n}$ ist möglich, da auf der linken Seite von (16) alle Glieder außer demjenigen vom Index m, n bereits bekannt sind, und dieses Glied wegen (14) den Wert $m? n? H_{m,n}$ hat, und auch die Bestimmung der $k_{m,n}$ keine Schwierigkeiten bietet.

Nun läßt sich die gesuchte Funktion $f(x, y)$ ansetzen in der Gestalt

$$f(x, y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\mu,\nu} \psi_{\mu,\nu}(x, y).$$

Es ist zunächst zu zeigen, daß diese Doppelreihe und ihre sämtlichen partiell abgeleiteten Reihen betragweise gleichmäßig konvergieren für alle x und y. Zu diesem Zweck beachten wir, daß nach (15) und (17)

$$|H_{\mu,\nu}||\psi_{\mu,\nu}^{(m,n)}(x, y)| \leqq \frac{k_{\mu,\nu}}{(\mu+1)^2(\nu+1)^2(\mu+\nu)^{\mu+\nu}} \frac{m!\, n!\, (\mu+\nu)^{m+n} 4^{m+n}}{k_{\mu,\nu}^{\mu+\nu-(m+n)}},$$

was für $\mu+\nu > m+n$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$\leqq \frac{m!\, n!\, 4^{m+n} k_{\mu,\nu}}{k_{\mu,\nu}(\mu+1)^2(\nu+1)^2} = \frac{m!\, n!\, 4^{m+n}}{(\mu+1)^2(\nu+1)^2},$$

d. h. mit Ausnahme endlich vieler Glieder sind die Glieder der betrachteten Doppelreihen absolut genommen kleiner als das allgemeine Glied einer konvergenten Doppelreihe positiver Konstanten, womit die behauptete gleichmäßige Konvergenz bewiesen ist.

Da $\psi_{\mu,\nu}^{(m,n)}(x, y) = \psi_{\mu}^{(m)}(x)\, \psi_{\nu}^{(n)}(y)$ von der Differentiationsreihenfolge unabhängig ist, existiert $f^{(m,n)}(x, y)$ bei jeder Reihenfolge der Differentiationen und hat unabhängig von derselben stets denselben Wert

$$f^{(m,n)}(x, y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\mu,\nu} \psi_{\mu,\nu}^{(m,n)}(x, y).$$

Und da die Glieder dieser Doppelreihen stetige Funktionen von x und y sind und die Doppelreihen betragweise gleichmäßig konvergieren, ist auch ihre Summe zweidimensional stetig.

Ferner wird

$$f^{(m,n)}(0, 0) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\mu,\nu} \psi_{\mu,\nu}^{(m,n)}(0, 0)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} H_{\mu,\nu} \psi_{\mu,\nu}^{(m,n)}(0, 0) + \sum_{\mu > m \text{ oder } \nu > n} \sum H_{\mu,\nu} \psi_{\mu,\nu}^{(m,n)}(0, 0).$$

Die letzte Summe hat den Wert 0 nach (14), sodaß nach (16) die

Beziehung besteht

$$f^{(m,n)}(0,0) = G_{m,n}.$$

§ 3. Funktionen von p reellen Argumenten.

Für die partiellen Ableitungen von Funktionen von p Argumenten existiert ein entsprechender Satz.

Satz 3: Zu jeder beliebig vorgeschriebenen p-fachen Folge $\{G_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}\}$ gibt es eine für alle reellen $x, y, \ldots, t$ unbegrenzt partiell differentiierbare, mit allen partiellen Ableitungen stetige Funktion $f(x, y, \ldots, t)$ von p Argumenten der Art, daß

$$f^{(m,n,\ldots,r)}(0,0,\ldots,0) = G_{m,n,\ldots,r} \qquad \begin{Bmatrix} m = 0,1,2,\ldots \\ n = 0,1,2,\ldots \\ \cdots\cdots\cdots \\ r = 0,1,2,\ldots \end{Bmatrix}. \tag{18}$$

Der **Beweis** läßt sich auf ähnliche Weise führen wie der Beweis des Satzes 2. Wir bilden die Funktionen

$$\psi_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}(x,y,\ldots,t) = \psi_\mu(x)\,\psi_\nu(y)\ldots\psi_\varrho(t) \qquad \begin{Bmatrix} \mu = 0,1,2,\ldots \\ \nu = 0,1,2,\ldots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varrho = 0,1,2,\ldots \end{Bmatrix},$$

wo die in $\psi_\mu(x), \psi_\nu(y), \ldots, \psi_\varrho(t)$ auftretende Zahl $k = k_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}$ das allgemeine Glied einer genügend stark anwachsenden p-fachen Folge ist.

Es ist dann

$$\psi^{(m,n,\ldots,r)}_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}(x,y,\ldots,t) = \psi^{(m)}_\mu(x)\,\psi^{(n)}_\nu(y)\ldots\psi^{(r)}_\varrho(t)$$

vorhanden und dem Werte nach unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen, sowie p-dimensional stetig. Ferner wird

$$\begin{cases} \psi^{(m,n,\ldots,r)}_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}(0,0,\ldots,0) = 0 \text{ für } m < \mu \text{ oder } n < \nu \ldots \text{ oder } r < \varrho, \\ \psi^{(\mu,\nu,\ldots,\varrho)}_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}(0,0,\ldots,0) = \mu\,?\,\nu\,?\ldots\varrho\,?. \end{cases} \tag{19}$$

Jede der in dem obigen Produkt vorkommenden p Funktionen läßt sich nebst allen ihren partiellen Ableitungen gleichmäßig abschätzen für alle reellen Werte ihres Arguments nach (9). Es folgt: Für alle reellen $x, y, \ldots, t$, d. h. im ganzen p-dimensionalen Raum, ist

$$\begin{aligned} |\psi^{(m,n,\ldots,r)}_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}(x,y,\ldots,t)| &= |\psi^{(m)}_\mu(x)|\,|\psi^{(n)}_\nu(y)|\ldots|\psi^{(r)}_\varrho(t)| \\ &\leqq m!\,n!\ldots r!\,(\mu+\nu+\cdots+\varrho)^{m+n+\cdots+r}\,4^{m+n+\cdots+r}\,k^{\mu+1+\cdots+\varrho-(m+n+\cdots+r)}_{\mu,\nu,\ldots,\varrho} \end{aligned} \tag{20}$$

$$\text{für } \begin{Bmatrix} m = 0,1,2,\ldots, & n = 0,1,2,\ldots, & \ldots, & r = 0,1,2,\ldots \\ \mu = 0,1,2,\ldots, & \nu = 0,1,2,\ldots, & \ldots, & \varrho = 0,1,2,\ldots \end{Bmatrix}.$$

Wir definieren nun zwei neue p-fache Folgen $\{H_{m,n,\ldots,}\}$ und $\{k_{m,n,\ldots,r}\}$. Die Bestimmung der Paare $H_{m,n,\ldots,r}$, $k_{m,n,\ldots,r}$ erfolgt nacheinander, und zwar nach „Diagonalräumen“ $m+n+\cdots+r$ = const., wobei die Reihenfolge im Diagonalraum beliebig bleibt. Zunächst wird $H_{m,n,\ldots,r}$ so bestimmt, daß

$$(21)\qquad \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}\cdots\sum_{\varrho=0}^{r} H_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}\,\psi^{(m,n,\ldots,r)}_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}(0,0,\ldots,0) = G_{m,n,\ldots,r}$$

wird und darauf $k_{m,n,\ldots,r}$ so, daß

$$(22)\qquad k_{m,n,\ldots,r} \geqq 1;\quad |H_{m,n,\ldots,r}|\,\frac{(m+n+\cdots+r)^{m+n+\cdots+r}}{k_{m,n,\ldots,r}} \leqq \frac{1}{(m+1)^2(n+1)^2\ldots(r+1)^2}.$$

Daß diese Bestimmung möglich ist, folgt leicht nach Analogie der vorhergehenden Beweise. Es sind ja auf der linken Seite von (21) alle Glieder außer dem vom Index $m, n, \ldots, r$ bereits bekannt, und dieses letzte Glied hat wegen (19) den Wert $m?\,n?\ldots r?\,H_{m,n,\ldots,r}$. Auch die Bestimmung der $k_{m,n,\ldots,r}$ läßt sich ohne weiteres vornehmen.

Wir bilden dann die Funktion

$$f(x,y,\ldots,t) = \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\cdots\sum_{\varrho=0}^{\infty} H_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}\,\psi_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}(x,y,\ldots,t).$$

Diese Funktion hat die im Satz 3 verlangten Eigenschaften. Es sind nämlich zunächst sämtliche gliedweise partiell abgeleiteten p-fachen Reihen betragweise gleichmäßig konvergent im ganzen p-dimensionalen Raum, denn nach (20) und (22) ist

$$|H_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}|\,|\psi^{(m,n,\ldots,r)}_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}(x,y,\ldots,t)| \leqq \frac{m!\,n!\ldots r!\,(\mu+\nu+\cdots+\varrho)^{m+n+\cdots+r}\,4^{m+n+\cdots+r}\,k_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}}{k^{\mu+\nu+\cdots+\varrho-(m+n+\cdots+r)}_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}\,(\mu+1)^2(\nu+1)^2\ldots(\varrho+1)^2\,(\mu+\nu+\cdots+\varrho)^{\mu+\nu+\cdots+\varrho}};$$

was für $\mu+\nu+\cdots+\varrho \geqq m+n+\cdots+r$ $\begin{cases} m=0,1,2,\ldots \\ n=0,1,2,\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ r=0,1,2,\ldots \end{cases}$:

$$\leqq \frac{m!\,n!\ldots r!\,4^{m+n+\cdots+r}}{(\mu+1)^2(\nu+1)^2\ldots(\varrho+1)^2},$$

d. h. bis auf endlich viele Glieder sind die Glieder der zu untersuchenden Reihen absolut genommen kleiner als das allgemeine Glied einer konvergenten p-fachen Reihe mit positiven konstanten Gliedern.

Da $\psi_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}^{(m,n,\ldots,r)}(x,y,\ldots,t) = \psi_\mu^{(m)}(x)\,\varphi_\nu^{(n)}(y)\ldots\psi_\varrho^{(r)}(t)$ von der Reihenfolge der Differentiationen unabhängig ist, existiert auch $f^{(m,n,\ldots,r)}(x,y,\ldots,t)$ und hat bei jeder Reihenfolge der Differentiationen denselben Wert

$$f^{(m,n,\ldots,r)}(x,y,\ldots,t) = \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\cdots\sum_{\varrho=0}^{\infty} H_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}\,\psi_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}^{(m,n,\ldots,r)}(x,y,\ldots,t).$$

Da die Glieder dieser p-fachen Reihen stetig sind und die Reihen betragweise gleichmäßig konvergieren, ist auch $f^{(m,n,\ldots,r)}(x,y,\ldots,t)$ p-dimensional stetig.

Ferner errechnet sich wegen (19) und (21)

$$\begin{aligned} f^{(m,n,\ldots,r)}(0,0,\ldots,0) &= \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\cdots\sum_{\varrho=0}^{\infty} H_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}\,\psi_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}^{(m,n,\ldots,r)}(0,0,\ldots,0) \\ &= \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}\cdots\sum_{\varrho=0}^{r} H_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}\,\psi_{\mu,\nu,\ldots,\varrho}^{(m,n,\ldots,r)}(0,0,\ldots,0) \\ &= G_{m,n,\ldots,r}. \end{aligned}$$

Aus den Sätzen 1, 2, 3 folgt allgemein, daß man die Ableitungen in einem beliebigen Punkt beliebig vorschreiben kann, was sich sofort durch eine Parallelverschiebung ergibt.

ABSCHNITT II.

Über die Folge der Maximalbeträge der Ableitungen in einem gegebenen endlichen Intervall.

§ 4. Funktionen eines reellen Arguments.

Es sei $f(x)$ eine in einem Intervall $a \leqq x \leqq b$ beliebig oft differentiierbare Funktion. M_m bezeichne das alsdann stets vorhandene Maximum von $|f^{(m)}(x)|$ im gegebenen Intervall.

Von dieser Folge der Maximalbeträge der Ableitungen in einem endlichen Intervall läßt sich nicht mehr dasselbe behaupten wie von der Folge der Ableitungen in einem gegebenen Punkt. Die Folge $M_0, M_1, \ldots, M_u, \ldots$ läßt sich nämlich nicht beliebig vorschreiben. Es sind vielmehr je drei Nachbarglieder notwendig durch eine Ungleichung miteinander verbunden, die sich bei Herrn Hadamard[4]) findet.

4) Hadamard, Sur le module maximum d'une fonction et de ses derivées, Comptes rendus des séances de la Soc. math. de France. 24. juin 1914. Vgl. S. 69.

Ich beschränke mich im Folgenden der Übersichtlichkeit halber auf ein Intervall der Länge 1, auf das sich die oben eingeführten M_m von jetzt ab beziehen sollen. Die entsprechenden allgemeinen Resultate gehen daraus durch eine einfache Transformation hervor. Mit Hilfe des Taylorschen Satzes errechnet man die Ungleichung

$$M_1 \leqq 2 M_0 + \tfrac{1}{2} M_2. \tag{23}$$

Für die Maximalbeträge der höheren Ableitungen ergibt sich dann durch Anwendung von (23) auf die Funktionen $f^{(m)}(x)$, $f^{(m-1)}(x)$, $f^{(m+1)}(x)$ die Ungleichung

$$M_m \leqq 2 M_{m-1} + \tfrac{1}{2} M_{m+1} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{24}$$

Wenn also eine Zahlenfolge die Folge der Maximalbeträge der Ableitungen in einem Intervall von der Länge 1 darstellen soll, so müssen notwendig zwischen je drei Nachbargliedern obige Beziehungen bestehen. Beliebig läßt sich also die Folge dieser Maximalbeträge nicht vorschreiben, denn es lassen sich immer Zahlenfolgen angeben, die den genannten Bedingungen nicht für alle Indizes genügen, z. B. $M_{2\mu} = 1$, $M_{2\mu+1} = 3$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$. Es ist aber wohl möglich, das Wachstum der Folge der Maximalbeträge sowohl „stärker" als auch „schwächer" zu machen als das einer gegebenen Zahlenfolge, was die folgenden Sätze zeigen werden.

Satz 4: Zu jeder beliebigen nicht negativen Zahlenfolge $\{G_\mu\}$ gibt es eine für alle reellen x unbegrenzt differentiierbare Funktion $f(x)$ der Art, daß die Folge der Maximalbeträge ihrer Ableitungen in einem gegebenen endlichen Intervall Glieder größer oder gleich denen der gegebenen Zahlenfolge hat [5]).

Beweis: Den Forderungen dieses Satzes genügt die in § 1 zur Folge $\{G_\mu\}$ konstruierte Funktion $f(x)$. Ist $M_m = \operatorname{Max} |f^{(m)}(x)|$ für $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$, so ist nach Satz 1

$$f^{(m)}(0) = G_m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

und daher

$$M_m \geqq G_m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

d. h. die Folge $\{M_m\}$ wächst nicht schwächer als die gegebene Folge $\{G_m\}$.

Satz 5: Zu jeder beliebigen nicht negativen Zahlenfolge $\{g_\mu\}$ gibt es eine für alle reellen x unbegrenzt differentiierbare Funktion $f(x)$ der Art, daß die Glieder der Folge der Maximalbeträge ihrer Ableitungen in einem gegebenen endlichen Intervall kleiner oder gleich denen der gegebenen Zahlenfolge sind.

5) Vergl. T. Carleman, Les fonctions quasi analytiques. Paris 1926. S. 11.

Beweis: Anstelle der Folge $\{g_\mu\}$ betrachten wir die Folge $\{\bar{g}_\mu\}$, wo

$$\bar{g}_\mu = \operatorname{Min}(g_0, g_1, \ldots, g_\mu) \text{ für } \mu = 0, 1, 2, \ldots .$$

Dann ist

$$\bar{g}_\mu \leqq g_\mu \text{ und } \bar{g}_\mu \geqq \bar{g}_{\mu+1},$$

sodaß $\{\bar{g}_\mu\}$ eine niemals zunehmende Zahlenfolge ist. Eine Funktion mit den verlangten Eigenschaften ist nun

$$f(x) = \frac{1}{e} \sum_{\mu=0}^{\infty} \bar{g}_\mu \frac{x^\mu}{\mu!} \text{ für } 0 \leqq x \leqq 1.$$

Es ist für $m = 0, 1, 2, \ldots$ und $0 \leqq x \leqq 1$:

$$f^{(m)}(x) = \frac{1}{e} \sum_{\mu=m}^{\infty} \bar{g}_\mu \frac{x^{\mu-m}}{(\mu-m)!} \leqq \frac{\bar{g}_m}{e} e = \bar{g}_m \leqq g_m.$$

Im betrachteten Intervall ist

$$f^{(m)}(x) \geqq 0, \text{ also } |f^{(m)}(x)| = f^{(m)}(x) \leqq g_m,$$

woraus folgt

$$M_m \leqq g_m,$$

d. h. die Folge der Maximalbeträge nimmt nicht schwächer ab als die gegebene Folge $\{g_\mu\}$.

§ 5. Funktionen von zwei reellen Argumenten.

Bei Funktionen von zwei Argumenten betrachten wir die Folge der Maximalbeträge der partiellen Ableitungen in einem gegebenen endlichen Rechteck. Sie bilden eine Doppelfolge. Wir zeigen zunächst, daß sich diese Doppelfolge nicht beliebig vorschreiben läßt, indem wir zwischen benachbarten Gliedern ähnliche notwendige Ungleichungen herleiten, wie sie für die Folge der Maximalbeträge der Ableitungen von Funktionen eines Arguments existieren. Wir beschränken uns dabei der Übersichtlichkeit halber auf ein Quadrat der Seitenlänge 1.

Es sei $f(x, y)$ eine in einem solchen Quadrat beliebig oft partiell differentiierbare Funktion mit stetig vorausgesetzten Ableitungen $f^{(m,n)}(x, y)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots)$. $M_{m,n}$ bezeichne das alsdann im gegebenen Quadrat stets vorhandene Maximum von $|f^{(m,n)}(x, y)|$, das im Punkt $(x_{m,n}, y_{m,n})$ angenommen werde.

Zwischen $M_{m,n}$ und seinen nächsten Nachbargliedern bestehen die folgenden beiden Ungleichungen:

$$(25) \qquad \begin{cases} M_{m,n} \leqq 2 M_{m-1,n} + \frac{1}{2} M_{m+1,n}, \\ M_{m,n} \leqq 2 M_{m,n-1} + \frac{1}{2} M_{m,n+1}, \end{cases}$$

die man erhält, wenn man bei festgehaltenem y die Funktionen

$$f^{(m,n)}(x, y_{m,n}),\quad f^{(m-1,n)}(x, y_{m,n}),\quad f^{(m+1,n)}(x, y_{m,n})$$

des einen Arguments x und bei festgehaltenem x die Funktionen

$$f^{(m,n)}(x_{m,n}, y),\quad f^{(m,n-1)}(x_{m,n}, y),\quad f^{(m,n+1)}(x_{m,n}, y)$$

des einen Arguments y betrachtet und darauf die Formel (24) anwendet. Durch Vereinigung der beiden Ungleichungen (25) erhält man dann

$$M_{m,n} \leqq M_{m-1,n} + M_{m,n-1} + \tfrac{1}{4} M_{m+1,n} + \tfrac{1}{4} M_{m,n+1}. \tag{26}$$

Der Beziehung (24) zwischen drei Gliedern der Folge der Maximalbeträge der Ableitungen von Funktionen eines Arguments entspricht also eine Beziehung zwischen fünf Gliedern bei Funktionen von zwei Argumenten.

Man kann nun immer Doppelfolgen angeben, deren Glieder den Bedingungen (26) nicht für alle möglichen Indizes genügen, z. B. $M_{2\mu+1,\,2\nu+1} = 3$ ($\mu = 0, 1, 2, \ldots$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$), alle übrigen Glieder gleich 1. Daher kann man auch die Doppelfolge der Maximalbeträge der partiellen Ableitungen in einem Quadrat der Seitenlänge 1 nicht beliebig vorschreiben.

Die nun folgenden beiden Sätze werden zeigen, daß die Doppelfolge der Maximalbeträge der partiellen Ableitungen in einem Quadrat der Seite 1 in dieselbe Beziehung zu gegebenen Doppelfolgen gesetzt werden kann, wie die Folge der Maximalbeträge der Ableitungen in einem endlichen Intervall zu gegebenen einfachen Folgen. Man kann nämlich ihr Wachstum sowohl „stärker“ als auch „schwächer“ machen als das einer gegebenen Doppelfolge.

Satz 6: Zu jeder beliebigen nicht negativen Doppelfolge $\{G_{\mu,\nu}\}$ gibt es eine für alle reellen x und y unbegrenzt partiell differentiierbare, mit allen Ableitungen stetige Funktion $f(x, y)$ der Art, daß die Beziehung besteht

$$M_{m,n} \geqq G_{m,n}.$$

Beweis: In der im Satz 2 zur Doppelfolge $\{G_{\mu,\nu}\}$ konstruierten Funktion $f(x, y)$ haben wir eine Funktion der gewünschten Art. Ist $M_{m,n}$ das Maximum von $|f^{(m,n)}(x, y)|$ im Quadrat $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leqq y \leqq \frac{1}{2}$, so ist

$$f^{(m,n)}(0, 0) = G_{m,n} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots,\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und

$$M_{m,n} \geqq |f^{(m,n)}(0, 0)| = f^{(m,n)}(0, 0),$$

woraus die Behauptung folgt.

Satz 7: Zu jeder beliebigen nicht negativen Doppelfolge $\{g_{\mu,\nu}\}$ gibt es eine für alle reellen x und y unbegrenzt partiell differentiierbare, mit allen Ableitungen stetige Funktion $f(x, y)$ der Art, daß die Beziehung besteht

$$M_{m,n} \leqq g_{m,n}.$$

Beweis: Aus der gegebenen Doppelfolge $\{g_{\mu,\nu}\}$ bilden wir eine andere mit dem allgemeinen Glied

$$\bar{g}_{\mu,\nu} = \operatorname{Min} \begin{Bmatrix} g_{0,0}, & g_{0,1}, & \cdots, & g_{0,\nu} \\ g_{1,0}, & g_{1,1}, & \cdots, & g_{1,\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{\mu,0}, & g_{\mu,1}, & \cdots, & g_{\mu,\nu} \end{Bmatrix} \text{ für } \mu = 0, 1, 2, \ldots, \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

sodaß

$$\bar{g}_{\mu,\nu} \leqq g_{\mu,\nu},$$

sowie

$$\bar{g}_{\mu,\nu} \geqq \bar{g}_{\mu+1,\nu} \text{ und } \bar{g}_{\mu,\nu} \geqq \bar{g}_{\mu,\nu+1},$$

die Doppelfolge $\{\bar{g}_{\mu,\nu}\}$ also niemals zunimmt. Den Forderungen des Satzes genügt dann die Funktion

$$f(x, y) = \frac{1}{e^2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{g}_{\mu,\nu} \frac{x^\mu}{\mu!} \frac{y^\nu}{\nu!} \quad \text{für } 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1.$$

Für $m = 0, 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots$ und $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ ist nämlich

$$f^{(m,n)}(x, y) = \frac{1}{e^2} \sum_{\mu=m}^{\infty} \sum_{\nu=n}^{\infty} \bar{g}_{\mu,\nu} \frac{x^{\mu-m}}{(\mu-m)!} \frac{y^{\nu-n}}{(\nu-n)!} \leqq \frac{\bar{g}_{m,n}\, e^2}{e^2}$$

$$= \bar{g}_{m,n} \leqq g_{m,n}.$$

Da im gegebenen Quadrat $f^{(m,n)}(x, y) \geqq 0$ ist, ist

$$|f^{(m,n)}(x, y)| = f^{(m,n)}(x, y) \leqq g_{m,n},$$

woraus folgt

$$M_{m,n} \leqq g_{m,n},$$

das ist die Behauptung.

§ 6. Funktionen von p reellen Argumenten.

Für die Maximalbeträge der partiellen Ableitungen von Funktionen von p reellen Argumenten gelten analoge Aussagen wie für die von Funktionen von zwei Argumenten. Die p-fache Folge der Maximalbeträge der partiellen Ableitungen in einem gegebenen p-dimensionalen Parallelepiped läßt sich nicht beliebig vorschreiben, wohl aber kann man ihr Wachstum sowohl „stärker“ als auch „schwächer“ machen als das einer gegebenen p-fachen Zahlenfolge.

Lebenslauf.

Ich bin geboren am 6. November 1893 zu Paderborn. Ich besuchte daselbst das Lyzeum und Oberlyzeum und erhielt das Reifezeugnis des Oberlyzeums am 11. März 1914, das Zeugnis der Lehrbefähigung für Lyzeen am 13. März 1915. Von 1915—1924 war ich als Lehrerin am Lyzeum in Paderborn tätig. Am 10. März 1924 erwarb ich in Münster das Reifezeugnis des Realgymnasiums. Von Ostern 1924—1929 studierte ich an der Universität zu Münster Mathematik und Naturwissenschaften.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Neder, spreche ich meinen aufrichtigen Dank aus für die Anregungen bei dieser Arbeit und das Interesse, das er ihr entgegenbrachte.